Def: Zeilenstufenform (Vorlesung 3):

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\dots 0 & a_{1,j_1} & \ast\dots\ast & \ast & \ast\dots\ast & \ast & \ast\dots\ast & \dots & \dots & \ast & \ast & \ast\dots\ast \\
0 & 0\dots 0 & 0 & 0\dots 0 & a_{2,j_2} & \ast\dots\ast & \ast & \ast\dots\ast & \dots & \dots & \ast & \ast & \ast\dots\ast \\
\vdots & & & & & 0\dots 0 & a_{3,j_3} & \ast\dots\ast & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & \ast & \ast\dots\ast \\
 & & & & \text{alles} & & & & & & & \ast & \ast\dots\ast \\
 & & & & \text{Null} & & & & & & & a_{r,j_r} & \ast\dots\ast \\
 & & & & & & & & & & & & 0\dots 0 \\
0 & \dots & & & & & & & & & & & 0\dots 0
\end{pmatrix}
$$

$\neq 0$

Zeilennormalform:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\dots 0 & 1 & \ast\dots\ast & 0 & \ast\dots\ast & 0 & \ast\dots\ast & \dots & \dots & \ast & 0 & \ast\dots\ast \\
0 & 0\dots 0 & 0 & 0\dots 0 & 1 & \ast\dots\ast & 0 & \ast\dots\ast & \dots & \dots & \ast & 0 & \ast\dots\ast \\
\vdots & & & & & 0\dots 0 & 1 & \ast\dots\ast & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \ast\dots\ast \\
 & & & & \text{alles} & & & & & & & 0 & \ast\dots\ast \\
 & & & & \text{Null} & & & & & & & 1 & \ast\dots\ast \\
 & & & & & & & & & & & & 0\dots 0 \\
0 & \dots & & & & & & & & & & & 0\dots 0
\end{pmatrix}
$$

Normalform:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ \text{Null} & & & 1\end{matrix} & \text{Null} \\ \hline \text{Null} & \text{Null}\end{array}\right)$$

Spaltenstufenform

Spaltennormalform analog

Satz:

Jede Matrix lässt sich durch (endlich viele) elementare ...

(a) Zeilenumformungen auf Zeilennormalform bringen.

(b) Spaltenumformungen auf Spaltennormalform bringen.

(c) Zeilen- und Spaltenumformungen auf Normalform bringen.

Rezept: LGS lösen.

Schritt 1: Schreibe das LGS in Matrixform:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Schritt 2: Überführe $(A, \underline{b})$ durch EZU in $(\tilde{A}, \underline{\tilde{b}})$ so, dass $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform ist.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & 0\ldots0 & \tilde{a}_{1,j_1} & *\ldots* & * & *\ldots* & * & *\ldots*\ \ldots & \ldots\ *\ * & *\ldots* & \tilde{b}_1 \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & \tilde{a}_{2,j_2} & *\ldots* & * & *\ldots*\ \ldots & \ldots\ *\ * & *\ldots* & \tilde{b}_2 \\
\vdots & & & & & 0\ldots0 & \tilde{a}_{3,j_3} & *\ldots* & & \vdots & \\
 & & & & & & & & * & *\ldots* & \\
 & & \text{alles} & & & & & & * & *\ldots* & \\
 & & \text{Null} & & & & & & \tilde{a}_{r,j_r} & *\ldots* & \tilde{b}_r \\
 & & & & & & & & & 0\ldots0 & \tilde{b}_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & 0\ldots0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right)}_{ZSF}$$

Betrachte Nullzeilen von $\tilde{A}$:

$r+1, \dots, m$ von $\tilde{A}$.

Falls $\begin{pmatrix} \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, $Lös(A, \underline{b}) = \emptyset$.

... Fertig

Falls $\begin{pmatrix} \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix} = \underline{0}$

oder

löse $\tilde{A} \cdot \underline{x} = \underline{\tilde{b}}$

zu Fuß nach x auf

(Schnitt Auflösen aus Vorlesung 4)

... Fertig.

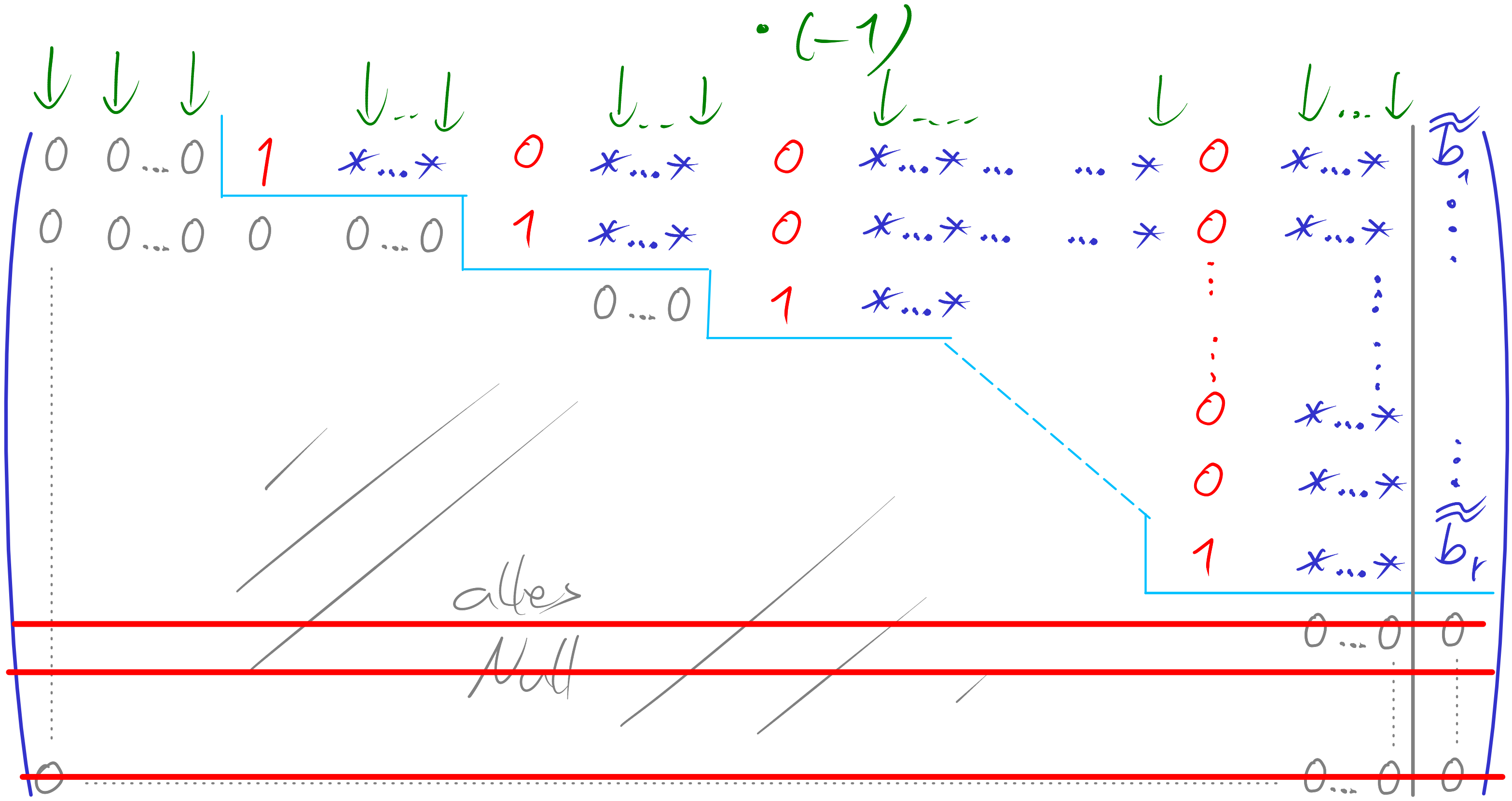
Schritt 3: Überführe $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ durch weitere EZU in Zeilennormalform $(\widehat{\widetilde{A}}, \widehat{\widetilde{b}})$

löse $\widehat{\widetilde{A}}\,\underline{x} = \widehat{\widetilde{b}}$ zu Fuß nach $\underline{x}$ auf.

Fertig.

Schritt 4:

Markiere Spalten von $\widehat{\widetilde{A}}$, in denen KEIN Pivot steht. Ändere in diesen Spalten alle Vorzeichen.

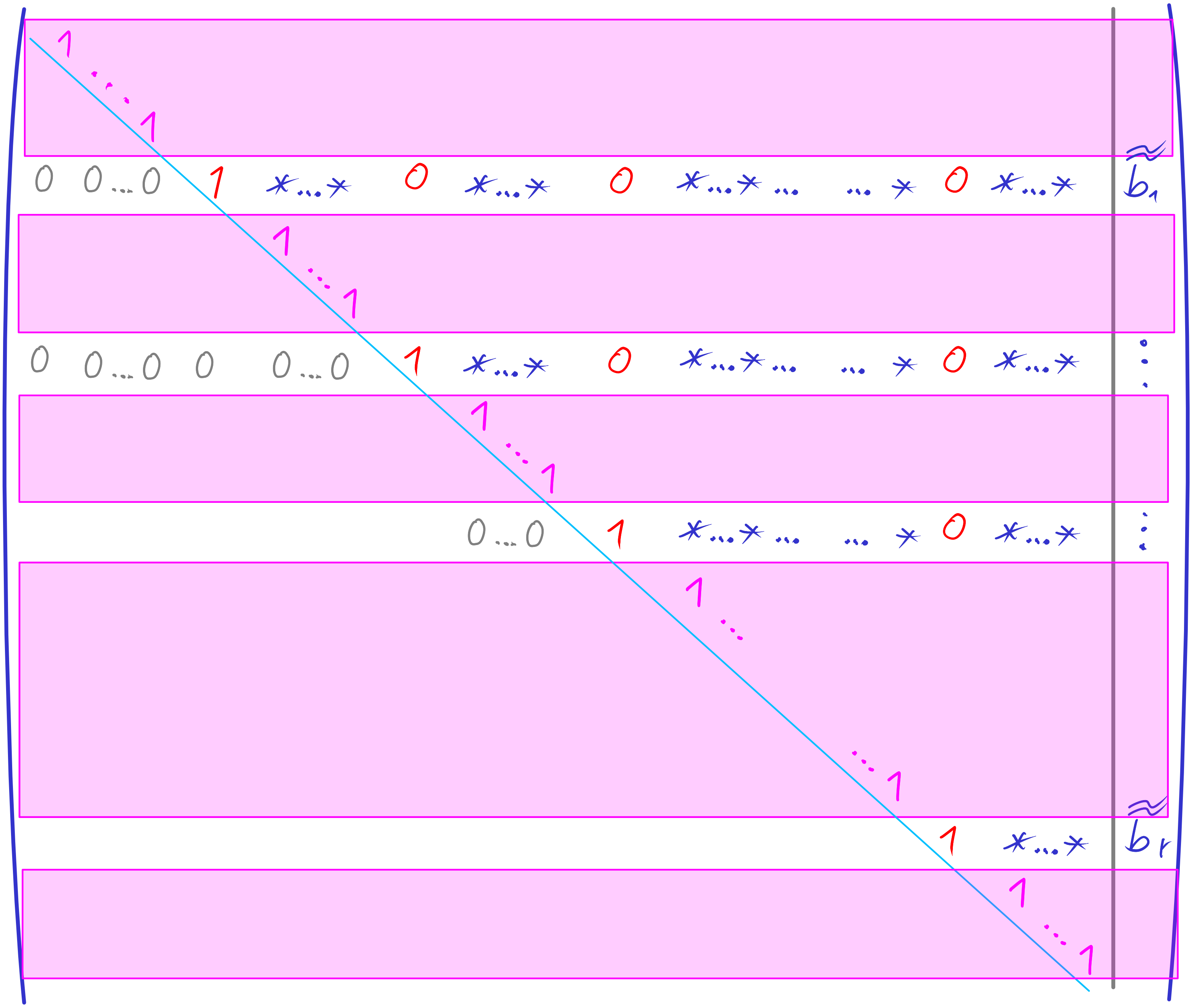


Schritt 5: Lösche die Nullzeilen

Schritt 6: Füge für jede markierte Spalte j eine Zeile der Form

$$\left(0 \quad 0 \ldots 0 \quad 0 \quad \underset{j\text{-te Eintrag}}{1} \quad 0 \quad 0 \ldots \qquad \ldots 0 \quad 0 \,\middle|\, 0\right)$$

so ein, dass die neuen 1en mit den Pivot 1en eine vollständige Diagonale bilden:



Schritt 7: Lösche alle (markierten) Spalten mit den Pivots.

Für die verbleibende Matrix

$$\left(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_\ell \;\middle|\; \underline{d} \right)$$

gilt: $\underline{d} \in \text{Lös}(A, \underline{b})$

$(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{n-r})$ Basis von $\text{Lös}(A)$

Insbesondere:

$$\text{Lös}(A, \underline{b}) = \underline{d} + \operatorname{span}(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{n-r})$$