

Def: Zeilenstufenform (Vorlesung 3):

$\neq 0$

Zeilennormalform:

Normalform:



Spaltenstufenform

Spaltennormalform analog

Satz:

Jede Matrix lässt sich durch (endlich viele) elementare ...

(a) Zeilenumformungen auf

Zeilennormalform bringen.

(b) Spaltenumformungen auf

Spaltennormalform bringen.

(c) Zeilen- und Spaltenumformungen

auf Normalform bringen.

Rezept: LGS lösen.

Schritt 1: Schreibe das LGS in Matrixform:

$$A \cdot x = b$$

Schritt 2: Über führe $(A|b)$ durch EZU in (\tilde{A}, \tilde{b}) so dass \tilde{A} in Zeilenstufenform ist.

The diagram shows an augmented matrix $A|b$ in row echelon form. The matrix A has n rows and m columns. The rightmost column b is labeled b_1, b_2, \dots, b_m . The matrix A is partitioned into n horizontal blocks $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_r$, where $r \leq n$. Each block \tilde{a}_i is $m \times m$ and has a leading 1 at position i,i , indicated by a red '1'. The entries below the leading 1 in each row i are crossed out with a red 'X'. The entries above the leading 1 in row i are crossed out with a blue 'X'. The entries in the b column below the i -th row are also crossed out with a blue 'X'. Dashed blue arrows point from the leading 1s in $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ to the corresponding entries in $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$. Below the matrix, a red wavy line labeled 'ZSF' indicates the zero step function. A green oval encloses the bottom-right corner of the matrix, containing the entries $\tilde{a}_{r+1}, \tilde{a}_{r+2}, \dots, \tilde{a}_m$ and $\tilde{b}_{r+1}, \tilde{b}_{r+2}, \dots, \tilde{b}_m$. A note 'alles Null' is written near the bottom left.

$$\begin{array}{c|cccccccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1,j_1} & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & \dots & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,j_2} & * & \dots & * & \dots & * & \dots & * & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & & & & & & & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{3,j_3} & * & \dots & * & \tilde{b}_3 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \tilde{b}_r \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & \tilde{b}_m \end{array}$$

alles Null

ZSF

Betrachte Nullzeilen von \tilde{A} :

Falls $\begin{pmatrix} \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, $\text{Löse } (\tilde{A}, \underline{b}) = \emptyset$.
... Fertig

Falls

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix} = \underline{0}$$

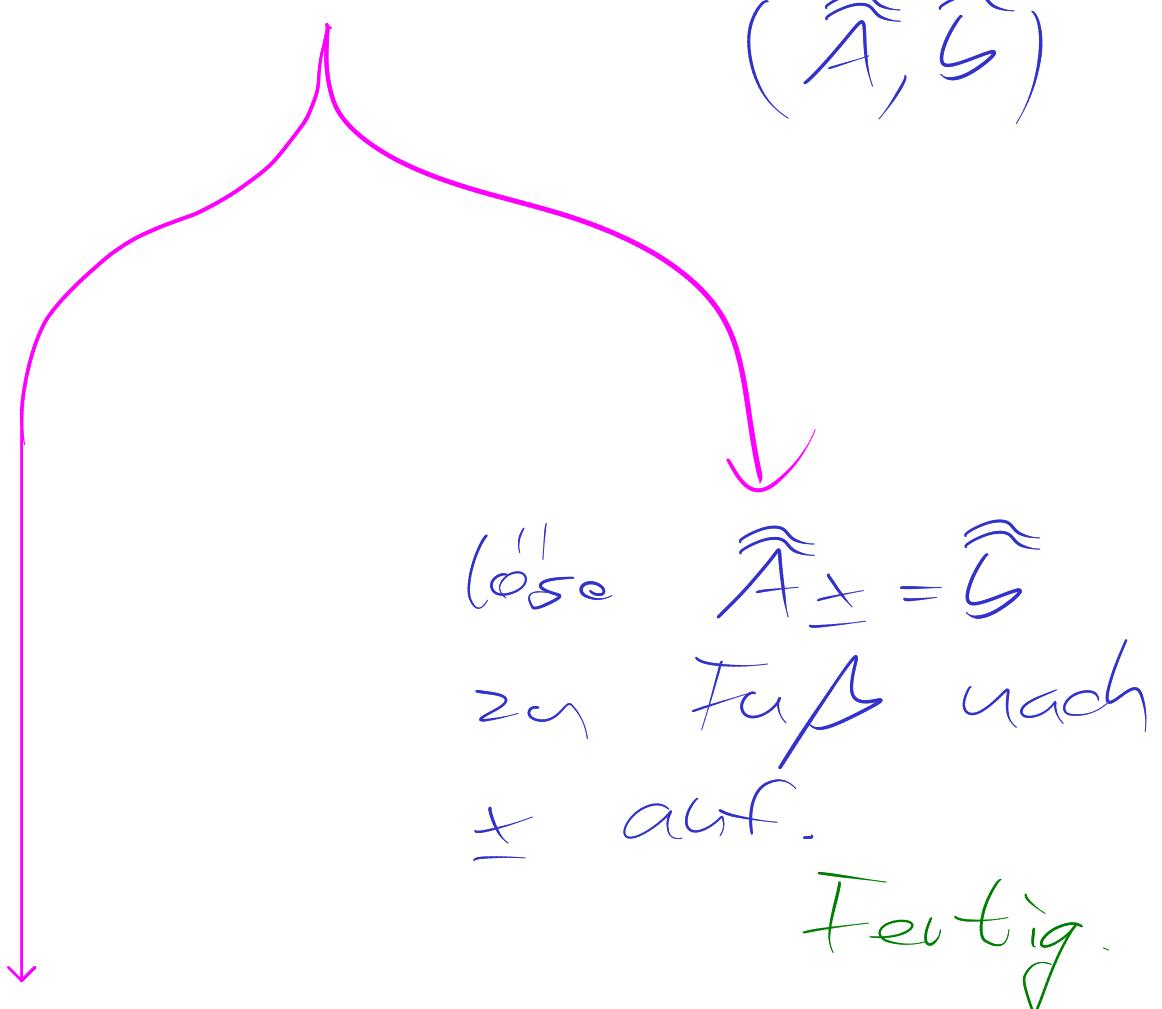
löse $\tilde{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$

zu Fuß nach +
auf

(Schritt Auflösen
aus Vorlesung 4)

... Fertig.

Schritt 3: Übergänge (\tilde{A}, \tilde{G}) durch
weitere E-ZU in
Zeilennormalform
 $(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{G}})$



Schritt 4:

Markiere Spalten von $\tilde{\tilde{A}}$,
in denen KEIN Pivot steht.
Andere in diesen Spalten
alle Vorzeichen.

\downarrow	\downarrow	\downarrow	$\downarrow \dots \downarrow$	$\downarrow \dots \downarrow$	$\cdot (-1)$	\downarrow	$\downarrow \dots \downarrow$	$\approx b_1$
0	$0 \dots 0$	1	$* \dots *$	0	$* \dots *$	0	$* \dots *$	\vdots
0	$0 \dots 0$	0	$0 \dots 0$	1	$* \dots *$	0	$* \dots *$	\vdots
				$0 \dots 0$	1	$* \dots *$		b_r
						\vdots	\vdots	
						0	$* \dots *$	
						0	$* \dots *$	
						1	$* \dots *$	
							$0 \dots 0$	
							$0 \dots 0$	
							$0 \dots 0$	

alles Null

Schritt 5: Löse die Nullzeilen

Schritt 6: Füge für jede markierte Spalte j eine Zeile der Form

$$(0 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots \dots \ 0 \ 0 | 0)$$

↑
j-te Eintrag

so ein, dass die neuen 1en mit den Pivot 1en eine vollständige Diagonale bilden:

The diagram illustrates five horizontal lines, each representing a binary string. A blue diagonal line, labeled b_1 , intersects the first four lines. A red diagonal line, labeled br , intersects the last three lines. The strings are composed of the following characters: 0, 1, *, and ... (dots).

- Line 1 (top): 1, ..., 1, 0, *, ..., 0, *, ..., 0, *
- Line 2: 0, 0, ..., 0, 1, *, ..., 0, *, ..., 0, *
- Line 3: 0, 0, 0, 0, 1, *, ..., 0, *, ..., 0, *
- Line 4: 0, ..., 0, 1, *, ..., 0, *
- Line 5 (bottom): 1, *, ..., 1, 0, *, ..., 1

Schritt 7: Lösche alle (unmarkierten) Spalten mit den Pivots.

Für die verfehlende Matrix

$$\left(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_l \mid \underline{d} \right)$$

gilt: $\underline{d} \in \text{Lös}(A, \underline{b})$

$(\underline{e}_{n-r}, \dots, \underline{e}_n)$ Basis von $\text{Lös}(A)$

Insbesondere:

$$\text{Lös}(A, \underline{b}) = \underline{d} + \text{span}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{n-r})$$